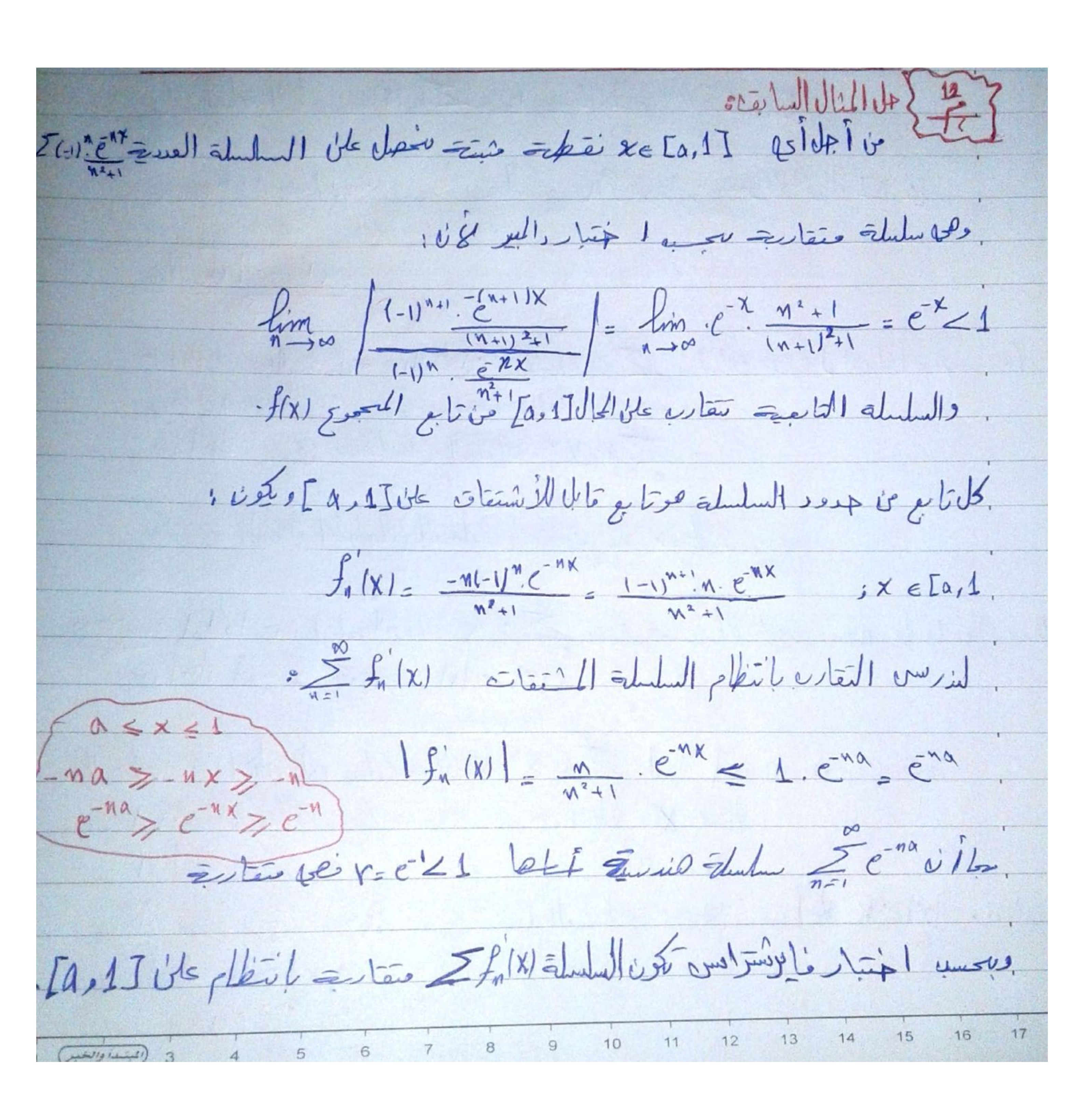


حل المثال السابق:

من أجل أي $x\in[a,1]$ نقطة مثبتة نحصل على السلسلة العددية $\sum (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$

وهي سلسلة متقاربة بحسب اختبار دالمبير لأن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{e^{-(n+1)x}}{(n+1)^2+1}}{(-1)^n\cdot\frac{e^{-nx}}{n^2+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} e^{-x}\cdot\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = e^{-x}<1$$

والسلسلة التابعية تتقارب على المجال $[a,1]$ من تابع المجموع $f(x)$.

كل تابع من حدود السلسلة هو تابع قابل للاشتقاق على $[a,1]$ ويكون:

$$f_n'(x) = \frac{-n(-1)^n e^{-nx}}{n^2+1} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot n\cdot e^{-nx}}{n^2+1} \quad ; x\in[a,1]$$

لندرس التقارب بانتظام السلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$:

$$|f_n'(x)| = \frac{n}{n^2+1}\cdot e^{-nx} \le 1\cdot e^{-na} = e^{-na}$$

$a \le x \le 1$

$-na \ge -nx \ge -n$

$e^{-na} \ge e^{-nx} \ge e^{-n}$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na}$ سلسلة هندسية أساسها $r=e^{-1}<1$ فهي متقاربة

وبحسب اختبار فايرشتراس تكون السلسلة $\sum f_n'(x)$ متقاربة بانتظام على $[a,1]$.

وبحسب مبرهنة الاشتقاق حداً حداً يكون التابع f تابع المجموع للسلسلة $\sum f_n(x)$
قابل للاشتقاق على $[0,1]$.
ويكون:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$$

وبما أن كل تابع $f'_n(x)$ (حيث $n = 1, 2, \ldots$) هو تابع مستمر على $[0,1]$.

والسلسلة التابعية $\sum f'_n(x)$ متقاربة بانتظام على $[0,1]$.

فحسب مبرهنة الاستمرارية يكون التابع $f'(x)$ هو تابع مستمر على المجال $[0,1]$.

سلاسل القوى:

تعريف: نسمي السلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ سلسلة قوى (أو سلسلة صحيحة)
حيث a_n هي أعداد حقيقية تسمى عوامل السلسلة.
- من أجل $x_0 = 0$ نحصل على السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n$.

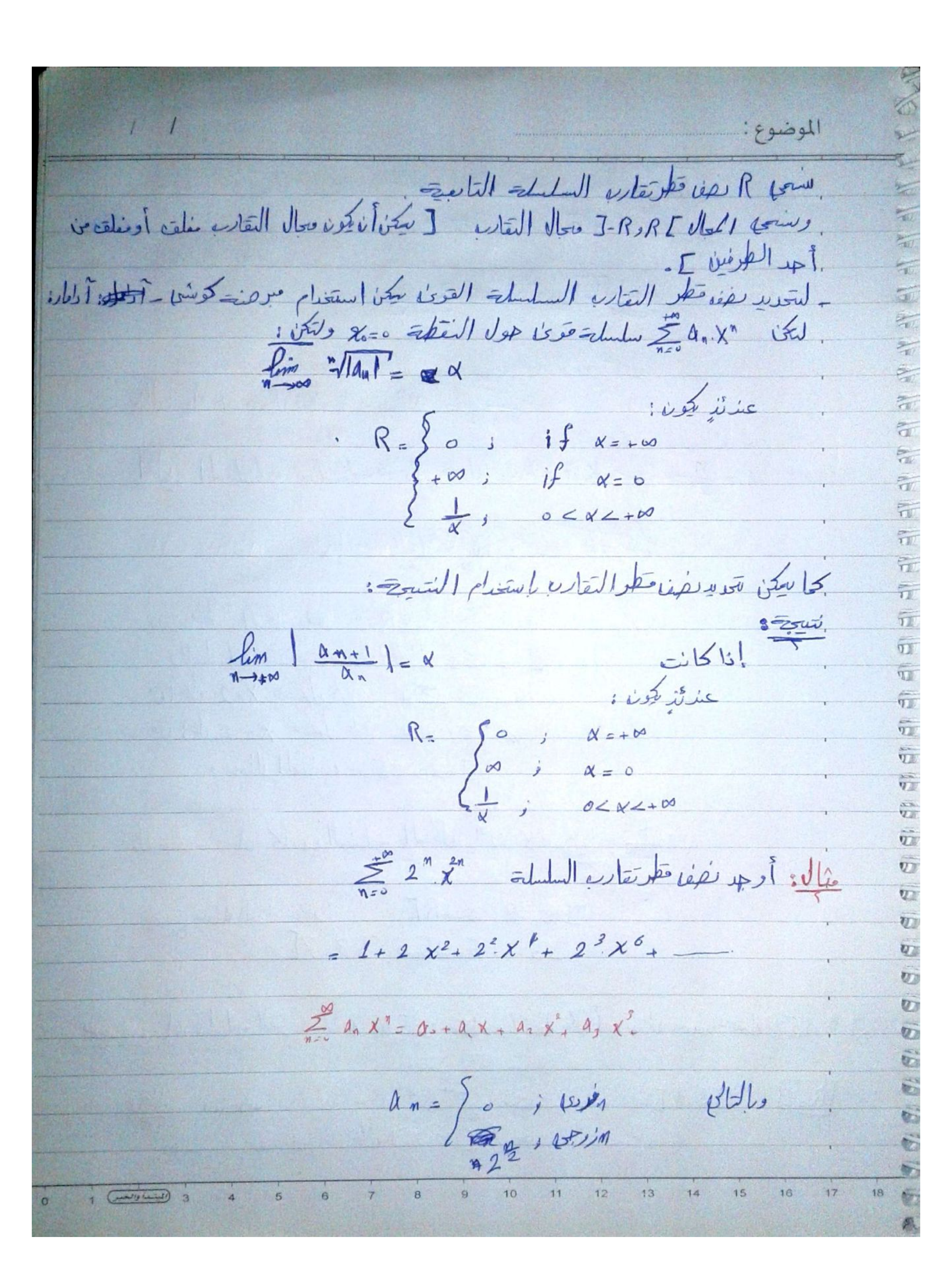
يمكن رد الشكل الأول إلى الشكل الثاني بوضع $t = x - x_0$.

مبرهنة: إذا كانت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n$ متقاربة عند النقطة $a \neq 0$ فإنها متقاربة مطلقاً
من أجل أي x تحقق $|x| < |a|$.

ملاحظة: من أجل أي سلسلة قوى $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n$ لدينا أحد ثلاث حالات:
- إما أن تكون السلسلة متقاربة من أجل $x = 0$ فقط.
- أو أن " " " " أي $x \in R$.
- أو " يوجد $R > 0$ بحيث تكون السلسلة متقاربة من أجل $|x| < R$ ومتباعدة
من أجل $|x| > R$

$|x| < R \Leftrightarrow]-R, R[$

$|x| > R \Leftrightarrow]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$


الموضوع: ....   /   /

نسمي R نصف قطر تقارب السلسلة التابعية.

ونسمي المجال $]-R, R[$ مجال التقارب [يمكن أن يكون مجال التقارب مغلق أو مغلق من أحد الطرفين].

- لتحديد نصف قطر التقارب السلسلة القوى يمكن استخدام مبرهنة كوشي - آدامار:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ سلسلة قوى حول النقطة $x_0 = 0$ ولتكن:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$$

عندئذٍ يكون:

$$R = \begin{cases} 0 ; & \text{if } \alpha = +\infty \\ +\infty ; & \text{if } \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha} ; & 0 < \alpha < +\infty \end{cases}$$

كما يمكن تحديد نصف قطر التقارب باستخدام النتيجة:

نتيجة:

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \alpha$

عندئذٍ يكون:

$$R = \begin{cases} 0 ; & \alpha = +\infty \\ \infty ; & \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha} ; & 0 < \alpha < +\infty \end{cases}$$

مثال: أوجد نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^{2n}$

$$= 1 + 2x^2 + 2^2 x^4 + 2^3 x^6 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

وبالتالي

$$a_n = \begin{cases} 0 ; & n \text{ فردي} \\ 2^{\frac{n}{2}} ; & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & ; \quad n \text{ فردي} \\ \sqrt{2} & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{n} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال: أوجد مجال تقارب $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \cdot x^n$

الحل: السلسلة سلسلة قوى حول النقطة $x_0 = 0$ و $a_n = \frac{n}{2^n}$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

نصف قطر التقارب هو $R = 2$.
والسلسلة متقاربة على المجال $]-2, 2[$
- من أجل $x = 2$ نحصل على $\sum n$ متباعدة.
- من أجل $x = -2$ نحصل على $\sum (-1)^n n$ ".
ومجال التقارب هو $]-2, 2[$

ملاحظة: إذا كانت السلسلة بالشكل $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} (x-5)^n$

يصبح مجال التقارب هو $]x_0 - R, x_0 + R[$
$]5-2 ; 5+2[=]3, 7[$

مبرهنة: إن سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n$ تتقارب بانتظام على أي مجال محدود محتوى في $]-R, R[$.

مثال: سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ متقاربة على المجال $]-1, 1[$ $\boxed{R = 1}$
متقاربة بانتظام على المجال $[-r, r]$ (حيث ; $0 < r < 1$)

الموضوع :   /   /

وليست متقاربة بانتظام على المجال $]-1,1[$.

مبرهنة: لتكن $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ سلسلة قوى ذات نصف قطر تقارب $R>0$ وليكن $f(x)$ تابع المجموع للسلسلة عندئذ تابع المجموع $f(x)$ هو تابع مستمر على المجال $]-R,R[$.

مبرهنة: إذا كانت سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n$ ذات نصف قطر تقارب $R>0$.

- فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n . x^{n-1}$ لها نفس قطر التقارب R.

ويكون التابع $f(x) = \sum a_n . x^n$ قابل للاشتقاق على المجال $]-R,R[$ ويكون:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n . a_n . x^{n-1} \; , \forall x \in]-R,R[$$

- كذلك، تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ لها نصف قطر تقارب R

ويكون:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . \int_a^b x^n \, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(b^{n+1} - a^{n+1} \right)$$

على أي مجال $[a,b]$ مغلق ومحدود ضمن المجال $]-R,R[$

ملاحظة: يمكن اشتقاق سلسلة القوى عدداً اختيارياً من المرات على المجال $]-R,R[$ والسلاسل الناتجة لها نفس نصف قطر التقارب R.

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1)\, a_n . x^{n-k}$$

مثال: أوجد تابع المجموع للسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 . x^n$

الحل: لنأخذ سلسلة القوى $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ وهي متقاربة على المجال $]-1,1[$; $R=1$ ومجموع السلسلة $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad x \in]-1,1[$$

الموضوع :

بحسب مبرهنة الاشتقاق لسلاسل القوى نجد :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

نضرب الطرفين بـ x

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2} \; ; \quad x \in]-1,1[$$

باشتقاق سلسلة القوى حداً حداً على المجال $]-1,1[$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \; ; \quad x \in]-1,1[$$

نضرب الطرفين بـ x

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot x^{n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

مثلاً : من أجل $x = \frac{1}{2}$ نحصل على السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$

★ إذا أخذنا السلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n$ سلسلة قوى ونصف قطر تقارب $R = 1$ ومتقاربة على المجال $]-1,1[$ ومجموعها $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n = \frac{1}{1+x} \; ; \quad x \in]-1,1[$$

نكامل السلسلة حداً حداً على المجال $[0,t]$ حيث $|t| < 1$.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t (-1)^n \cdot x^n \cdot dx = \int_0^t \frac{dx}{1+x}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{n+1}}{n+1} = \ln(1+t) \; ; \quad |t| < 1$$

$\Rightarrow$ من أجل $t = \frac{1}{2}$ نحصل على :

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1} \cdot (n+1)}$$

مثال: أوجد مجال تقارب سلسلة القوى $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n!)} (x+1)^n$

الحل: لدينا $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n!)^2}$ لنوجد النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!)^2}}{\frac{(n!)^2}{(2n!)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!.((n+1)!)^2}{(2n+2)!.(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$$

نصف قطر التقارب $\Rightarrow R = 4$

والسلسلة متقاربة على المجال $]x_0-R, x_0+R[=]-5, 3[$

- من أجل $x=3$ نحصل على السلسلة $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n!)} . 4^n$

نستخدم اختبار رآب:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim n \left(\frac{\frac{(n!)^2}{(2n!)}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{4(2n)!\,((n+1)!)^2} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{[(n+1)(n+\frac{1}{2})}{(n+1)^2} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}n}{n+1} = -\frac{1}{2} < 1$$

والسلسلة متباعدة

الموضوع : ....

من أجل $x=-5$ نحصل على السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-4)^5$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 4^n$$

والسلسلة متباعدة لأن الحد العام لا يسعى نحو الصفر .

مثال : أوجد مجال تقارب سلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

لدينا $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$$

والسلسلة تتقارب على $]-1, 1[$

- من أجل $x=1$ نحصل على السلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة حسب لبنتز.
- " " $x=-1$ " " " $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة.

مجال التقارب على $]-1, 1]$

مثال : أوجد مجموع النقاط $x \in R$ التي تتقارب من أجلها السلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$$

هي سلسلة هندسية أساسها $r = \frac{x-1}{x+1}$ وتكون متقاربة عندما $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 < (x+1)^2$$

$$\cancel{x^2}-2x\cancel{+1} < \cancel{x^2}+2x\cancel{+1} \iff 0<4x$$
$$\iff x>0 \iff x\in]0,+\infty[$$

مثال: أثبت أن تابع المجموع للسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^3 x^2}$

هو تابع مستمر على المجال $]0,\infty[$

الحل: كل حد من حدود السلسلة هو تابع مستمر على المجال $]0,\infty[$.
لندرس التقارب المنتظم على المجال $]0,+\infty[$.

$|f_n(x)| \le M_n$

$\frac{x}{1+n^3x^2} \le$

$1 \downarrow \quad \downarrow n^{\frac{3}{2}}\cdot x$

$(1-n^{\frac{3}{2}}x)^2 \geq 0 \quad \forall x\in]0,\infty[$

$1+n^3\cdot x^2 - 2n^{\frac{3}{2}}x \geq 0$

$2n^{\frac{3}{2}}x \le 1+n^3\cdot x^2$

$\frac{2n^{\frac{3}{2}}x}{n^3\cdot x^2} \le 1$

$f(x) = \frac{x}{1+n^3\cdot x^2} \le \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \ , \ \forall x\in]0,\infty[;$

بما أن $\sum \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ متقاربة وبحسب اختبار فايرشتراس تكون السلسلة التالية $\sum \frac{x}{1+n^3x^2}$
متقاربة بانتظام على $]0,\infty[$.
وبحسب مبرهنة الاستمرارية يكون التابع المجموع للسلسلة مستمر على $]0,\infty[$.

مثال: ادرس التقارب المنتظم لسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ← $]-1,1[$ تتقارب مطلقاً على المجال
على المجال $]0,1[$:

الحل: $\forall \varepsilon>0 , \exists N(\varepsilon) ; m>n>N(\varepsilon) \Rightarrow |\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)|<\varepsilon$ كوشي

النفي : $\exists\ \varepsilon>0 ;\ \forall N\in\mathbb{N} ;\ \exists\ m,n>N ;\ \left|\sum_{n}^{m} f_n(x)\right|>\varepsilon$

$$\sum_{n=N}^{2N}\frac{x^n}{n}=\frac{x^N}{N}+\frac{x^{N+1}}{N+1}+\text{——}+\frac{x^{2N}}{2N}$$

لنختار $x=\sqrt[N]{\frac{1}{2}}\ \in\ ]0,1[$ نجد :

من أجل أي عدد طبيعي $N\in\mathbb{N}$

$$\sum_{n=N}^{2N}\frac{x^n}{n}=\frac{\frac{1}{2}}{N}+\frac{\frac{1}{2}\sqrt[N]{\frac{1}{2}}}{N+1}+\text{——}\cdots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2N}$$

$$\geq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\text{——}+\frac{1}{2N}\right)$$

$$\geq\frac{1}{4}\left(\underbrace{\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N}+\text{——}+\frac{1}{2N}}_{N+1}\right)$$

$$=\frac{N+1}{2N}\geq\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\varepsilon$$

$\frac{1}{2}\sqrt[N]{\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\sqrt[N]{\frac{1}{2}}>\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}>\left(\frac{1}{2}\right)^N$

والسلسلة ليست متقاربة بانتظام باستخدام معيار كوشي